Midtoets Calculus II 12-03-2010

6,8

1) a) 1 het geldt voor $n=1$ want $a_1 = 2 \leq 2$

2 neem nu aan $0 < a_n \leq 2$

te bewijzen $0 < a_{n+1} \leq 2$

5

3 bewijs : $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$

a_n is maximaal 2, dus a_{n+1} is maximaal $\frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1 \leq 2$

a_n is minimaal 0, (wordt niet nul), dus a_n is minimaal $\frac{1}{3-0} = \frac{1}{3} \geq 0$ □

dus $0 < \frac{1}{3} < a_{n+1} \leq 1 \leq$

b) te bewijzen $a_{n+1} \leq a_n$

1) het geldt voor $n=1$ want $a_1 = 2$ $a_{n+1} = \frac{1}{3-2} = 1$ $1 < 2$

2) neem nu aan $a_{n+1} \leq a_n$

te bewijzen $a_{n+2} \leq a_{n+1}$

bewijs

$$a_{n+1} \leq a_n$$

$$-a_{n+1} \geq -a_n$$

$$3-a_{n+1} \geq 3-a_n$$

$$\frac{1}{3-a_{n+1}} \leq \frac{1}{3-a_n}$$

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} \quad □$$

16

de ~~reeks~~ rij is begrensd (zie a) en monotoon (dalend, zie b) dus de rij is convergent.

in de limiet $\lim_{n\to\infty}$ geldt $a_{n+1} = a_n$

dus $a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n} = a_n$ $a_n(3-a_n) = 1$ $a_n^2 - 3a_n + 1 = 0$

$a_n = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 2$ dus valt af.

de limiet is dus $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(n+1)^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^n}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{(n+1)^n}} = \frac{1}{n+1} < 1$$

15

dus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^n}$ is absoluut convergent

Volgens de vergelijkingstest is de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(n+1)^n}$ dan ook absoluut convergent.

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} a_n = 0 \cdot a_n = 0$

$\Rightarrow \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} a_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} a_n$ $\frac{1}{\sqrt{n}} a_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} a_n =$ divergent (p-reeks)

-5

$\Rightarrow \frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} a_n$ is divergent (vergelijkingstest.

5

(4) a $f(x) = \frac{1}{1-2x} = 1 + (2x) + (2x^2) + (-2x)^3 + \dots$

$= 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

(want $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$)

$g(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} = x^2 \left(\frac{1}{1-4x+4x^2} \right) = x^2 \left(\frac{1}{1-(4x-4x^2)} \right)$

$= x^2 \left(1 + (4x-4x^2) + (4x-4x^2)^2 + \dots \right) = x^2 + 4x^2(x-x^2) + 16x^2(x-x^2)^2 + 64\dots$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^2 (x-x^2)^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (x-x^2)^n$

convergentie: $x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (x-x^2)^n$

$\sqrt[n]{|4^n (x-x^2)^n|} = |4(x-x^2)|$

de reeks is convergent als $|4(x-x^2)| < 1$

$\Rightarrow$ dus $-1 < 4(x-x^2) < 1$

$4(x-x^2) = 1$

$x - x^2 = \frac{1}{4}$

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ of $4(x-x^2) = -1$

$x - x^2 = -\frac{1}{4}$

$x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot -\frac{1}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{2})$

dus voor $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is de reeks convergent

-4

-3

5

(1) rand gevallen: $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})$

$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1-\sqrt{2})^2 \right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{2} + 2) \right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(-\frac{1}{4} \right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n =$ = alternerende reeks

~~divergent~~ $\lim_{n \to \infty} 1 = 1 \Rightarrow$ divergent

(2) $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$

$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1+\sqrt{2})^2 \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{4}(1 + 2\sqrt{2} + 2) \right)^n$

$4^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \Rightarrow$ divergent

de reeks is convergent voor $\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}) < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})$

$= \{x \mid \frac{1}{2}(1-\sqrt{2}) < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\}$

lengte $= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, d\cancel{x}t$ (-1)

$= a\cdot 3\cos^2\varphi\cdot -\sin\varphi = -3a\cos^2\varphi\sin\varphi$ 2φ 3φ

$= a\cdot 3\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi = 3a\cos\varphi\sin^2\varphi$

$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = 9a^2\cos^4\varphi\sin^2\varphi$

$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 9a^2\cos^2\varphi\sin^4\varphi$

$\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4\varphi\sin^2\varphi+9a^2\cos^2\varphi\sin^4\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\, d\varphi$

$\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 3a\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$ 5φ

$\frac{3}{2}a\int - = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} -$

$\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi} 2\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{3}{2}a\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}a\left(\frac{1}{2}\sin 4\pi - \frac{1}{2}\sin 2\cdot 0\right) = 0$ X (-4)

$\Rightarrow$ dit klopt niet, maar ik weet de formule voor de lengte niet, en het gaat om de methode.

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{-3a\cos\varphi\sin^2\varphi}{3a\cos^2\varphi\sin\varphi} = \frac{-\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\tan\varphi}$ X (-6)

6 a) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} = 0$ dus $f_n(x)$ convergeert puntsgewijs naar de nulfunctie $f(x)=0$

b) nee, $x=\frac{1}{n}$ ligt in $[0,1]$ maar voor $x=\frac{1}{n}$ wordt $f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-n\cdot\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1$, dit is niet de nulfunctie, dus is f_n niet uniform convergent naar de nulfunctie.

68